Gravitazione di tre corpi

Usare le leggi di Newton con Scratch per scoprire le traiettorie di tre corpi legati gravitazionalmente.

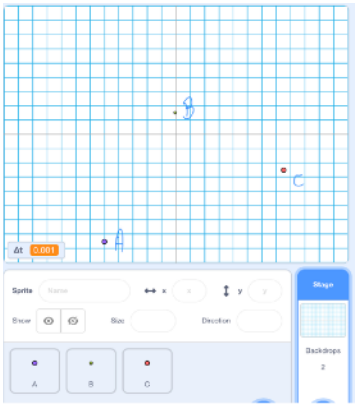
Si tratta di approssimare numericamente la posizione che assumono tre corpi sotto l'effetto della reciproca attrazione gravitazionale.

Il progetto "**gravitazione di tre corpi, base**" risolve il problema con una approssimazione accettabile.

Nota: le unità di misura adottate sono arbitrarie per essere adatte all'uso di Scratch; non si tiene conto delle dimensioni dei corpi per cui essi si possono sfiorare quanto si vuole senza che accada nulla nella simulazione; per il calcolo vettoriale si adotta la scomposizione dei vettori lungo gli assi cartesiani con angoli definiti secondo le convenzioni di Scratch; quando uno dei corpi tocca il bordo la simulazione perde di significato e andrebbe interrotta.

La situazione iniziale

Sono dati tre corpi A, B, C di massa mA, mB, mC posizionati in PA, PB, PC.



L'attrazione gravitazionale

In base alla legge di gravitazione universale di Newton tra i punti P e Q di masse mP e mQ si manifesta una forza di attrazione che in modulo è direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza data da:

$$F_{PQ} = G\frac{m_P * m_Q}{dist_{PQ}{}^2}$$

e di direzione pari a quella del segmento che va da P a Q ma di senso opposto.

Per la precisione l'espressione vettoriale è:

$$\vec{F}_{PQ} = -G\frac{m_P * m_Q}{|PQ|^2} * \frac{\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}$$

Poiché i punti in gioco sono tre, ciascuno di essi è interessato a due interazioni gravitazionali per cui la forza agente su ciascuno di essi va calcolata sommando vettorialmente due forze.

I calcoli vettoriali

Per eseguire calcoli vettoriali con Scratch ho scelto di scomporre ogni vettore nelle due direzioni ortogonali e di svolgere calcoli operazioni sulle due componenti per cui ogni grandezza vettoriale sarà rappresentata dalle sue due componenti lungo gli assi x e y del piano di Scratch.

Messa in questi termini

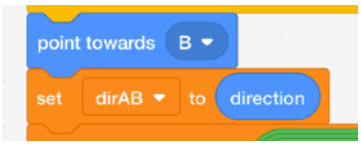
- le tre posizioni iniziali sono date da: (PAx,PAy), (PBx,PBy), (PCx,PCy) e
- le velocità iniziali sono date da (VAx,VAy), (VBx,VBy), (VCx,VCy).
- Per procedere occorre calcolare tre forze:
- FAB è la forza su A dovuta a B;
- FBC è la forza su B dovuta a C;
- FCA è la forza su C dovuta ad A.

Per calcolare le tre forze in modulo occorre ricavare il quadrato delle distanze e lo si fa con l'uso del teorema di Pitagora dove l'ipotenusa è data dal segmento che congiunge i due punti ed i cateti sono dati alla sua proiezione sugli assi cartesiani per cui:

Nota: ai fini del calcolo non serve la distanza ma il suo quadrato per cui basta questa espressione.

Si determinano così i valori dei quadrati delle distanze distAB^2, distBC^2, distCA^2.

Per procedere occorre avere anche la direzione di ciascuna delle forze per cui si utilizza un reporter di Scratch che punta uno sprite per ricavare la direzione:



Dato che la direzione va da A a B, questo valore è già quello da usare per la direzione della forza di B su A per cui è assegnato alla variabile dirAB.

Si hanno così le direzioni dirAB della forza che B esercita su A, dirBC della forza che C esercita su B e dirCA della forza che A esercita su C.

La composizione vettoriale delle forze

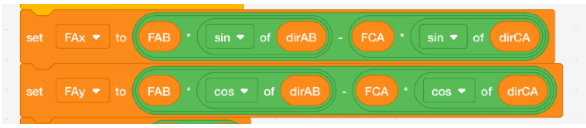
Ognuno dei tre oggetti è sollecitato da due forze di intensità e direzioni diverse e variabili in base alle posizioni relative.

Per calcolare la forza esercitata su A da B e C occorre sommare vettorialmente

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC}$$

con FAB che è la forza che B esercita su A, e FAC che è la forza che C esercita su A.

Sapendo che la forza che C esercita su A è di verso opposto alla FCA che è la forza che A esercita su C, le due componenti sono calcolate come in figura:



L'evoluzione del moto

Si tratta di calcolare come si spostano i tre punti A, B, C dopo un tempo Δt a causa della accelerazione data dalla forza di attrazione.

Con le due componenti delle forze applicate ad una massa si calcola l'accelerazione che questa subisce usando l'espressione della dinamica:

$$F = m * a$$

da cui:

$$accAx = \frac{FAx}{mA}$$

e

$$accAy = \frac{FAy}{mA}$$

L'accelerazione applicata per un intervallo di tempo Δt e supposta costante per l'intero intervallo produce una variazione di velocità lungo x

$$\Delta VAx = accAx * \Delta t$$

che permette di aggiornare la velocità con il comando:

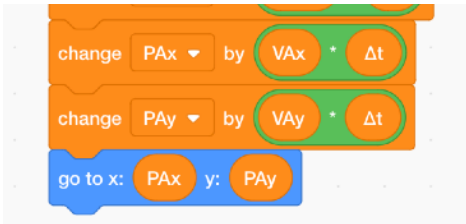
applicato alle due direzioni.

Lo spostamento

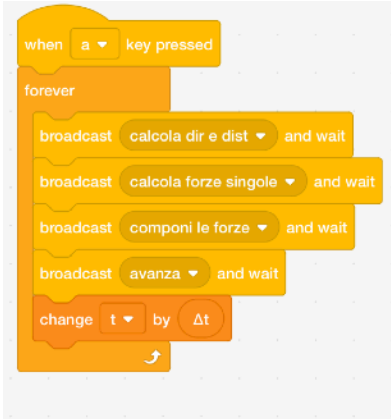
Aggiornata vettorialmente la velocità al nuovo valore si calcola lo spostamento nello stesso intervallo di tempo Δt:

$$\Delta PA\,x = VA\,x * \Delta t$$

e quindi la nuova posizione aggiungendo lo spostamento alla posizione precedente:

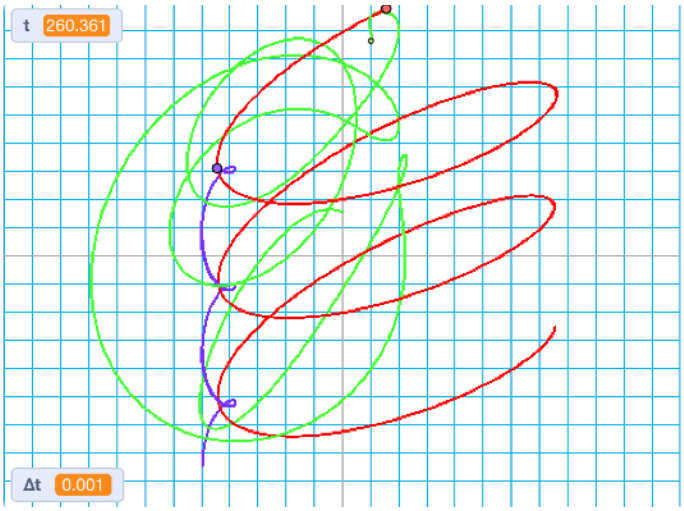


È molto importante eseguire i vari calcoli per tutti e tre i punti ad ogni passo prima di effettuare spostamenti e questo viene assicurato dalla sequenza di messaggi usati per attivare le procedure di calcolo una dopo l'altra.



Il risultato

Il risultato, dato un set di parametri iniziali, è il seguente:



Cambiando i parametri iniziali le curve si discostano da quelle qui presentate in modo imprevedibile e tendenzialmente caotico.

Note su errori ed approssimazioni

L'integrazione avviene per tempi Δt discreti e questo comporta errori che si accumulano col procedere dei calcoli; per limitare gli errori si usano Δt molto piccoli ed è indispensabile inserire la funzione "turbo".

Gli errori sono dati da approssimazioni su accelerazione e velocità mantenuti costanti per tutto l'intervallo di tempo Δt e l'approssimazione delle curve con segmenti di retta (le loro corde) dati dallo spostamento ΔP calcolato.

Per impedire che la distanza sia nulla, portando a risultati non accettabili dato che il valore è al denominatore del calcolo della forza, si impedisce che il quadrato della distanza raggiunga valori inferiori ad una soglia da scegliere.