Orbite in orbita

Il progetto di Scratch “Orbite in orbita” contiene esperimenti predisposti con l'uso dei tasti numerici per indagare con la simulazione diverse situazioni nelle quali due corpi orbitanti reciprocamente vengono interessati da un terzo corpo che orbita intorno ad uno di essi.

In queste pagine vengono illustrati i calcoli effettuati per impostare le varie situazioni orbitali. proposte nell’articolo “**Orbitare in orbita**”.

La costante gravitazionale vale 100 mentre come già spiegato in altri articoli, le masse sono misurate in unità di massa um, le distanze vengono misurate in passi ed i tempi in multipli del numero di iterazioni, i tic.

Tutti i moti vengono impostati con velocità orizzontale iniziale nulla per cui si può avere una quantità di moto verticale totale non nulla con corrispondente spostamento del centro di massa lungo l'asse y.

Per minimizzare questo spostamento di deriva si cerca di bilanciare i valori delle quantità di moto di A e di C iniziali che sono i corpi di massa prevalente in modo da fare spostare il me o possibile il baricentro del sistema.

La massa di B è di solito trascurabile.

Casi sperimentali

1) orbita A-C circolare, B su C

Le masse di A e C sono confrontabili (100 um e 50 um), le loro orbite sono circolari e la reciproca distanza è quindi invariabile.

Il corpo B verrà posizionato alla destra di C ad una distanza scelta dallo sperimentatore.

***

La velocità per un’orbita circolare di C intorno ad A va calcolata con[1]

$$\mu \frac{v^2}{r} = G \frac{m_1 * m_2}{r^2}$$

dove μ è la massa equivalente.

Si ricava la velocità tangenziale di uno dei due corpi relativamente all’altro:

[1] *https://www.unisalento.it/documents/20152/195207/Gravitazione+2.pdf/7d37b30c-b686-16ac-9748-2524fe6e633d?version=1.0*

$$v^2 = \frac{r}{\mu} G \frac{m_1 * m_2}{r^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 * m_2} G \frac{m_1 + m_2}{r} = G \frac{m_1 + m_2}{r}$$

$$v = \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{r}}$$

***

Con la distanza fra A e C fissata a 150 passi la velocità per avere un moto circolare è:

$$v = \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{r}} = \sqrt{100 \frac{100 + 50}{150}} = 10 \; passi/tic$$

Valori inferiori porterebbero l'estremo opposto in un punto meno distante e quindi ad un'orbita ellittica.

Per avere il centro di massa sostanzialmente fermo rispetto al riferimento fisso con lo stage si fa in modo di avere una quantità di moto totale iniziale pA +pB nulla per cui VAy = -3,33333 e VCy = 6.66667.

La quantità di moto aggiuntiva iniziale data dalla piccola massa di B porterà lentamente il centro di massa ad alzarsi.

***

Per fare orbitare B intorno a C, il corpo B viene posizionato alla destra di C ad una distanza da scegliere e con una velocità relativa a C data dalla velocità orbitale di B che per un'orbita circolare vale:

$$VB_{rel} = \sqrt{G \frac{mC}{r}}$$

Questa velocità relativa a C va aggiunta a quella di C per cui il valore da inserire nel codice è:

$$VBy = VCy + VB_{rel}$$

***

Per esempio, per fare orbitare B intorno a C viene posizionato alla destra di C alla distanza di 10 passi con una velocità relativa a C data dalla velocità orbitale che per un'orbita circolare che vale:

$$VB_{rel} = \sqrt{G \frac{mC}{r}} = \sqrt{100 \frac{50}{10}} \simeq 22{,}36 \; passi/tic$$

Questa velocità relativa va aggiunta a quella di C per cui il valore da inserire nel codice è:

$$VBy = VCy + VB_{rel} = 4 + 22{,}36 \simeq 26{,}36\ passi/tic$$

***

Scratch invita lo sperimentatore ad inserire il valore della distanza per calcolare la velocità iniziale di B così è possibile fare esperimenti con distanze iniziali diverse.

Nota: lentamente ma inesorabilmente il centro di massa si sposta verso l'alto dato che la quantità di moto del corpo B non è stata compensata nell'attribuire le velocità iniziali dei tre corpi.

2) orbita A-C ellittica, B su C

L'orbita ellittica di C su A è stata ottenuta con una velocità iniziale di 6 passi/tic impressa perpendicolarmente ad una distanza di 150 passi.

Con una velocità di 6 passi/tic, quindi inferiore a 10, l'orbita non è circolare ma ellittica ed il punto opposto a quello iniziale sarà più vicino ad A generando un'orbita molto eccentrica.

La scelta è voluta per vedere cosa accade in occasione dei passaggi ravvicinati che avvengono alla distanza di circa 33 passi (**periastro**) contro i 150 passi (**afastro**) della massima distanza.

Per avere quantità di moto prossima a zero in modo da non spostare troppo il baricentro del sistema di tre corpi, la situazione iniziale presenta una velocità iniziale di A pari a -2 (quindi verso il basso) e di C verso l'alto pari a 4; la velocità relativa di C su A è 6 passi/tic come si voleva.

3) orbita A-C circolare, B su A

L'orbita circolare di A-C è la stessa del caso 1) mentre per fare orbitare B intorno ad A occorre posizionarla vicino ad A e conferirgli una velocità relativa ad A data da:

$$VB_{rel} = \sqrt{G\frac{mA}{r}}$$

Questa velocità relativa va aggiunta a quella di A per cui il valore da inserire nel codice è:

$$VBy = VAy + VB_{rel}$$

La misurazione del periodo orbitale A-C viene effettuata quando C attraversa l'asse delle x al termine della prima orbita ed offre un valore di 94,237 tic.

Detto con maggiore precisione, il periodo viene misurato con l'intervallo di tempo che intercorre tra due passaggi consecutivi di C lungo la direzione dell'asse delle ascisse se visto da A.

Il calcolo teorico viene dalla formula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G * (mA + mB)}} = 2\pi\sqrt{\frac{150^3}{100 * (100 + 50)}} = 94{,}247$$

che mi sembra un buon risultato.

***

Come impostare l'orbita di B intorno ad A perché abbia un periodo dato?

Valgono le espressioni

$$r^3 = \frac{T^2 * G * mA}{(2\pi)^2}$$

Per un periodo che sia pari al periodo di A-C,

si calcola una distanza data di:

$$r^3 = \frac{T^2 * G * mA}{(2\pi)^2} = \frac{94{,}24^2 * 100 * 100}{(2\pi)^2} = 2251911$$

che restituisce il valore r = 131 passi.

Questa distanza è così grande che B si troverebbe troppo vicino a C per cui B non andrebbe mai in orbita intorno ad A.

Provare.

***

In modalità editor è stata annullata la gravità di C per misurare la durata del periodo senza un eventuale effetto dato dalla sua presenza..

Dopo aver messo A in posizione fissa con il tasto [F], è stato misurato il tempo trascorso fino a quando B si trova lungo la direzione dell'asse x, il risultato è 94,316 per cui il periodo corrisponderebbe.

***

Si fanno prove con periodi molto diversi tenendo conto della proporzione (terza legge di Keplero):

$$r_1^3 : r_2^3 = T_1^2 : T_2^2$$

$$r_2^3 = r_1^3 * \frac{T_2^2}{T_1^2} = r_1^3 * (\frac{T_2}{T_1})^2$$

Si prova con periodo metà con cui viene r = 85,57 passi; nell'esperimento si vede che A non ce la fa ad agganciare ed in effetti B è più vicino a C che riesce a prevalere anche se ha massa minore.

Si prova con periodo un terzo con r = 63 passi.

Con massa di C nulla, si misura il periodo che risulta essere di circa 31,4 tic che è proprio pari a un terzo del periodo base.

Si reintroduce la massa di C si rileva la durata al momento in cui B si trova nella direzione dell'asse x delle ascisse; il risultato della misurazione è 22,1 tic.

Il periodo di B non dipende solo da A attorno a cui ruota ma anche da C.

Mi fermo qui, non ho strumenti teorici per approfondire e credo sia difficile farlo in quanto le masse di A e C sono paragonabili e le distanze sono confrontabili.

Con B a 70 passi di distanza la situazione è instabile.

4) A-C circolare a 350 passi, B su A

Si porta la distanza A-C a 350 passi e si fissa A al centro dello stage.

Per avere A e C in orbita circolare bisogna che la velocità relativa sia

$$VAC_{rel} = \sqrt{G\frac{mA + mC}{r}} = \sqrt{100\frac{150}{350}} \simeq 6{,}54\ passi/tic$$

Per mantenere fermo il centro di massa occorre azzerare la quantità di moto totale verticale e lo si ottiene con VAy = -2,18 passi/tic e VBy = 4,36 passi/tic.

Si prova con orbite circolari di B, almeno nelle intenzioni, e con distanze crescenti per vedere se c'è una regione in cui diventano instabili in qualche modo.

In effetti si sta cercando il raggio della sfera di Hill per corpi molto vicini e di massa paragonabile che sono casi non contemplati con metodi analitici.

orbita 5)

La massa di C è molto minore della massa di A e quella di B ancora più piccola, la distanza è ancora 350 passi.

L'orbita circolare si calcola con

$$v = \sqrt{G\frac{m_1 + m_2}{r}} = \sqrt{100\frac{100 + 0{,}1}{350}} \simeq 5{,}35\ passi/tic$$

dove si vede che la massa mC comincia ad essere trascurabile rispetto alla massa mA per cui il raggio potrebbe essere calcolato con l'espressione semplificata valida per i satelliti artificiali o per i pianeti:

$$V_{circ} = \sqrt{G\frac{m}{r}} = \sqrt{100\frac{100}{350}} \simeq 5{,}35\ passi$$

Alla ricerca del raggio della sfera di Hill per il corpo A non si può usare la formula data dalla teoria **15/04/11/la-sfera-di-hill/** in quanto questa è stata approssimata per il calcolo di r_H per il corpo di massa minore.

Si fanno prove ma il valore trovato non può essere confrontato con quanto si deduce dalla teoria.

orbita 6)

Il corpo B deve orbitare intorno a C: quale è il limite prima che A prevalga?

In base all'articolo **15/04/11/la-sfera-di-hill/** il valore massimo della distanza di B da C dovrebbe aggirarsi intorno a

$$r_{H-C} = d * (\frac{mC}{3 * mA})^{1/3} = 350 * (\frac{0{,}1}{3 * 100})^{1/3} \simeq 24\ passi$$

Il raggio di Hill è un valore approssimativo da usare con cutela, può essere pensato come un valore limite e di solito si usano valori inferiori.

Non costa nulla provare con B a 24 passi da C e vedere cosa accade.

Provando si vede che B resta stabile se la distanza è inferiore a 12 passi dopodiché B si allontana.

***

Nulla di strano: è una situazione in cui prevale l'attrazione di A con velocità maggiore di quella necessaria per un'orbita circolare intorno ad A.

Con distanza iniziale di 15 passi la velocità di B all'inizio dell'esperimento è stata calcolata dal codice per orbitare intorno a C, il suo valore risulta essere di circa 6,18 passi/tic (premere il tasto [B] per vedere i dati orbitali prima di avviare il moto).

Un corpo B che si trovi distante dal A 350+15 = 365 passi per essere in orbita circolare in assenza di C dovrebbe avere una velocità

$$V_{circ} = \sqrt{G\frac{m}{r}} = \sqrt{100\frac{100}{365}} \simeq 5{,}23\ passi$$

In questa situazione C se non riesce a trattenere B allora B entra in un'orbita ellittica intorno ad A e il punto iniziale ne è il periastro.

***

Sembra che il valore del raggio della sfera di Hill si attesti intorno a 12 passi; il risultato è compatibile con il valore precedentemente calcolato in quanto di solito si imposta il valore del raggio della sfera di Hill tra un terzo e due terzi del valore calcolato.

L'unico problema è la difficoltà di vedere l'orbita circolare di B intorno a C in quanto la vicinanza impedisce di distinguere B da C.

***

Questo è il motivo per cui si scambiano le masse fra A e C: poter ingrandire la grafica per vedere B intorno ad A.

orbita 7)

La massa prevalente diventa C e A diventa la massa minore:

- mA = 0,1 um,
- mC = 100 um.

In questo modo è possibile utilizzare le funzioni del progetto che permettono di vedere A fisso in centro con il tasto [F] e di ingrandire la grafica con il tasto[K] per osservare meglio l'orbita di B intorno ad A.

Nota. Il centro di massa si vede sovrapposto al corpo C.

È poi la situazione che pone il sistema di riferimento solidale con la Terra dalla quale si vede il Sole ruotargli intorno.

Il raggio della sfera di Hill si calcola ancora

$$r_{H-A} = d * (\frac{mA}{3 * mC})^{1/3} = 350 * (\frac{0,1}{3 * 100})^{1/3} \simeq 24\ passi$$

Si provano le stesse distanze di prima e si osservano gli stessi risultati.

orbita 8) tentativi di distanza grande

Per sapere se si ottiene una migliore approssimazione del calcolo della sfera di Hill si può provare ad aumentare la distanza mantenendo la situazione del caso sette.

La massa di A resta molto minore della massa di C e B che orbita intorno ad A, la distanza A-C è 6000 passi.

$$v = \sqrt{G\frac{m_1 + m_2}{r}} = \sqrt{100\frac{100 + 0,1}{6000}} \simeq 1,292\ passi/tic$$

Il centro di massa è vicinissimo a C.

Si è nelle circostanze utilizzate per approssimare il calcolo del raggio della sfera di Hill per il corpo A posto al centro del sistema di riferimento; il raggio si trova con

$$r_{H-A} = d * (\frac{mA}{3 * mC})^{1/3} = 6000 * (\frac{0,1}{3 * 100})^{1/3} \simeq 416\ passi$$

***

Si prova ma l'evoluzione dell'orbita ma con Δt=0,001 tic è molto lenta e ci vuole molto tempo per vedere qualcosa di concreto.

Per superare la difficoltà la velocità del calcolo viene aumentata portando, l'intervallo di tempo Δt usato per l'integrazione a 0,256 tic.

Una distanza di 200 passi porta ad instabilità sulla regolarità dell'orbita.

Con 150 passi di distanza la situazione sembra abbastanza stabile.

Si è di nuovo entro la gamma 1/3 _ 2/3 di r_H.