Il pendolo

oscillazioni, isocronismo

Misurazione del periodo di oscillazione

L'esperimento di misurazione del periodo del pendolo è interessante perché si tratta di verificare se le sue oscillazioni siano isocrone con diverse ampiezze di oscillazione.

Molti testi di fisica assicurano la validità di questa proprietà per piccoli angoli senza specificare cosa si intenda per "piccoli"[1].

Tale proprietà è allora da verificare.

La verifica andrebbe effettuata con un pendolo reale ma, in mancanza di questo, si può provare con il pendolo simulato con Scratch.

Primo esperimento

Con l'esperimento "**il pendolo**" si preme **[bandierina verde]** si seleziona con **[tasto A]** l'ampiezza in radianti o **[tasto G]** l'ampiezza in gradi e con **[tasto R]** si avvia il calcolo per vedere il pendolo oscillare intorno alla posizione verticale.

Il moto oscillante è ottenuto con la reiterazione della procedura "**sposta**":

[1] *Generalmente, nei testi scolastici, non viene indicato quale sia il valore dell'angolo da intendere "piccolo", ma si precisa che deve essere un angolo la cui ampiezza in radianti si confonde con il suo seno. Anche in questo caso, però, non si specifica fino a quale cifra decimale si può ammettere questa approssimazione perché si possa considerare come "piccola oscillazione".*

La procedura viene chiamata solo dopo che è stato fissato l'angolo di avvio.

Nota. Scratch usa angoli misurati in gradi per cui gli angoli usati nel blocco "sposta" devono essere tradotti in gradi per posizionare il pendolo sullo stage.

Schema e funzionamento

Il pendolo viene schematizzato come un corpo allungato, rigido, di lunghezza fissa, libero di ruotare attorno ad un perno sistemato ad una delle estremità[2].

Si suppone che la massa e quindi la forza peso dovuta all'accelerazione di gravità sia concentrata al centro della figura sferica posta all'altra estremità[3] (quella che finisce più in basso).

La dinamica del moto rotatorio è descritta dall'equazione:

$$\tau = I * \ddot{\theta}$$

dove:

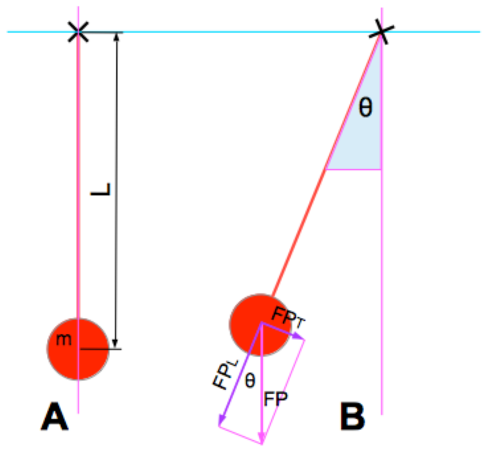
- τ è il momento torcente (o **momento meccanico**) delle forze applicate al corpo altrimenti chiamato Coppia "C",
- I è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione,

[2] È sufficiente che il perno sia in un punto diverso dal centro di massa.

[3] Questa ipotesi serve solo a semplificare alcuni calcoli per mettere in evidenza le proprietà dell'oscillazione. Si vedrà che è sufficiente conoscere il momento di inerzia rispetto al centro di rotazione per calcolare i parametri dell'oscillazione. Con la suddetta ipotesi è solo più facile calcolare il momento di inerzia.

- ***θ*** è l'angolo misurato rispetto ad una direzione fissa e con un verso scelto convenzionalmente,
- $\ddot{\theta}$ (si legge "theta due punti") è l'accelerazione angolare.

Schematicamente si ha il disegno seguente:



"***m***" è la massa della sfera rossa, "***L***" è la distanza fra il perno ed il centro di massa.

Il costume del pendolo viene disegnato così:

in modo che quando si imposta la rotazione a zero, lo si veda nella posizione verticale di riposo.

La forma allungata e la posizione del perno non coincidente con il baricentro costringono il pendolo ad assumere una posizione privilegiata di riposo (A). In essa la forza peso "***FP***", che è sempre verticale, è allineata con la linea che congiunge il perno al baricentro, così che non si produce una coppia di forze perché il braccio della coppia di forze è nullo.

In questa posizione viene collocata l'origine degli angoli di oscillazione, che in Scratch sono positivi per rotazioni in senso orario.

Se il pendolo viene allontanato dalla posizione di riposo (B) di un angolo "***θ***", la nuova posizione è instabile: il pendolo tenderà a raggiungere la posizione di riposo grazie ad un momento meccanico dovuto alla forza peso "***FP***".

In questa posizione (B), con ***θ*** positivo, si manifesta un momento torcente di direzione opposta all'angolo ***θ*** (da cui il segno negativo), che tende a riportare il pendolo nella posizione di riposo con un'accelerazione angolare che dipende dalla posizione angolare del pendolo.

Per studiare la situazione, la forza peso "***FP***" viene scomposta in due direzioni ortogonali:

- la componente "***FPL***", longitudinale, che è allineata alla linea che congiunge il perno con il baricentro e
- la componente "***FPT***", trasversale, normale alla precedente.

Nella posizione angolare "***θ***", la forza peso esercita un momento di rotazione dato da:

$$\tau = -F_P * L * \sin\theta = -m * g * L * \sin\theta$$

La dinamica del moto rotatorio del pendolo viene quindi rappresentata dall'espressione:

$$-F_P * L * \sin\theta = -m * g * L * \sin\theta = I * \ddot{\theta}$$

Con le semplificazioni sopra esposte[4], il momento di inerzia vale:

$$I = m * L^2$$

Dato il momento di inerzia, si trova l'espressione dell'accelerazione angolare:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\tau}{I} = \frac{m * g * \sin\theta}{m * L^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Nello script del progetto "**il pendolo**", "***k***" corrisponde al rapporto "***– g/L***".

La simulazione del moto procede nel seguente modo:

[4] *Il momento di inerzia di una massa m concentrata in un punto alla distanza L dal perno è I = m*L^2.*

1. si allontana il pendolo di un angolo α dalla posizione di equilibrio;
2. sul pendolo agisce una coppia di senso opposto all'angolo di rotazione che accelera il pendolo per riportarlo alla posizione di equilibrio;
3. si ripete sempre {
    a. data l'accelerazione si calcola la velocità al termine del primo intervallo di tempo Δt,
    b. si calcola l'angolo di rotazione al termine del primo intervallo di tempo Δt,
    c. si aggiorna la posizione angolare dello sprite,
    d. con il nuovo angolo di rotazione si ricalcola l'accelerazione angolare;
    e. }

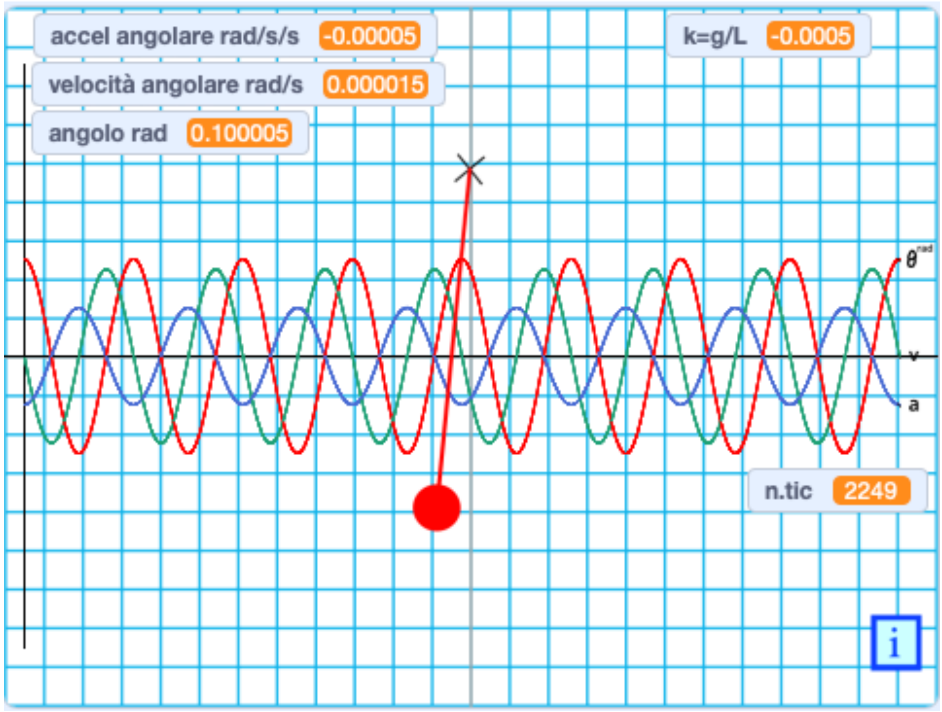
Misurazioni con piccola ampiezza (0,1 rad)

Con questo progetto si può fare una prima misurazione del periodo.

Si preme il **[tasto 1]** e poi **[tasto R]** per avviare il moto.

Si tiene sotto controllo il grafico della velocità (colore verde) che inizia da zero con pendenza negativa per arrestare l'oscillazione con **[spazio]** quando la velocità completa un periodo in modo da poter contare i periodi interi e calcolare il periodo con un errore di apprezzamento ridotto.

Con **[tasto S]** si può procedere per piccoli passi per una maggiore precisione.



Nell'esempio di figura, sul grafico si contano 8 periodi interi per una durata complessiva di 2249 tic[5].

Il periodo dell'oscillazione osservato sul grafico vale:

$$T = \frac{duratatotale}{numperiodi} = \frac{2249}{8} = 281{,}125\ tic$$

Dalla teoria del pendolo (**wikipedia**) si sa che il periodo per oscillazioni di piccola ampiezza vale

$$T_0 = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Con i dati dell'esperimento (k in valore assoluto vale 0,0005 e Δt = 1) risulta un periodo di

$$T_0 = 2\pi * \sqrt{\frac{1}{k}} = 2 * 3{,}14 * \sqrt{2000} = 280{,}85\ s$$

Il risultato della misurazione effettuata in questo modo è molto vicino al valore dedotto dalla previsione teorica normalmente usata per piccole ampiezze.

---

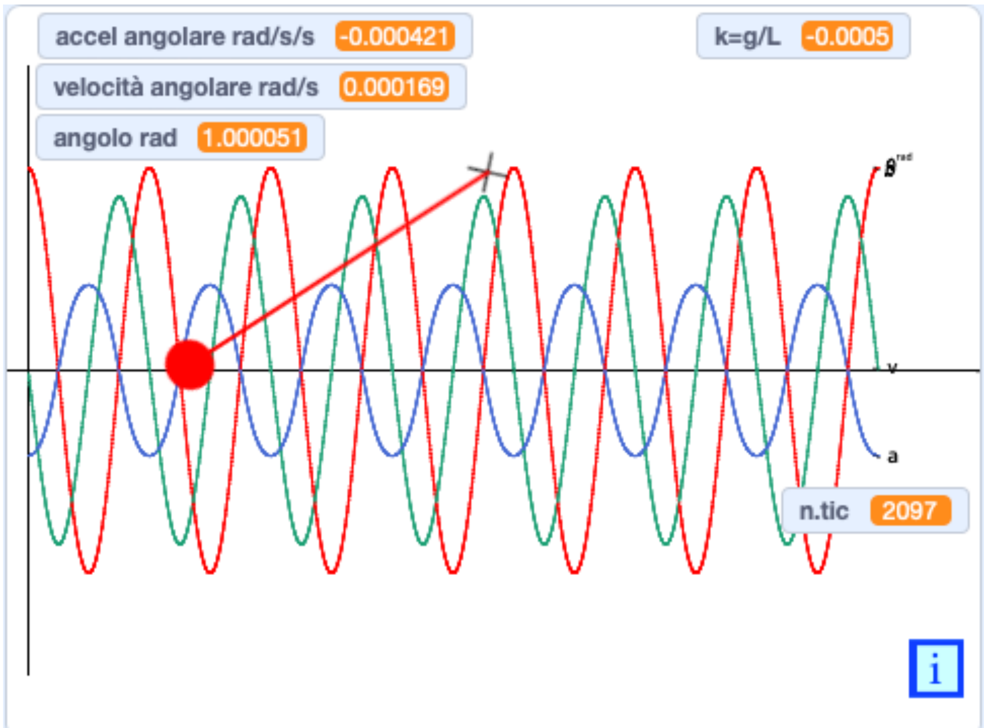
[5] *Viene chiamato "tic" la durata di una iterazione che in questi esempi è pari ad 1s per eseguire l'integrazione numerica.*

Per oscillazioni di grande ampiezza l'approssimazione usata per ricavare l'espressione della durata del periodo potrebbe non essere più accettabile.

Misurazioni con grande ampiezza (1 rad)

Con questo progetto si può fare una prima misurazione del periodo.

Si preme il **[tasto 2]** e poi **[tasto R]** per avviare il moto.



Sul grafico si contano 7 periodi interi per una durata complessiva di 2097 tic.

Il periodo dell'oscillazione osservato sul grafico vale:

$$T = \frac{duratatotale}{numperiodi} = \frac{2097}{7} = 299{,}47\ tic$$

Il periodo risulta essere molto maggiore di quanto previsto dalla teoria: perché?

Tra le cause possibili si possono ipotizzare:

1. un modello fisico sbagliato;
2. un errore nella misurazione;
3. una imprecisione insita nel metodo numerico di integrazione del moto;

4. imprecisioni date dall'uso di un software (Scratch) non pensato per usi scientifici;
5. un errore dato dal calcolo del periodo basato su una formula ricavata per piccole oscillazioni.

Le cose stanno così:

- non si è più nell'ambito delle "piccole oscillazioni",
- non valgono le leggi del moto armonico e
- non è la simulazione a sbagliare i calcoli.

Questo esperimento sembra non confermare l'isocronismo delle oscillazioni del pendolo.

Le oscillazioni del pendolo non sembrano essere isocrone.

Diventa necessario esplorare il comportamento del pendolo con maggiore precisione.

Misurazione precisa del periodo

Con il progetto "**il periodo del pendolo**"si possono eseguire misure più precise per migliorare il confronto con quanto prevede la teoria.

Il metodo usato in questo progetto consiste nel individuare il momento del cambio di segno della variabile "angolo" che avviene ad ogni mezzo periodo dell'oscillazione.

I parametri usati sono:

- L = 1 m,
- g = 9,81 m/s^2,
- Δt = 1 s.

L'esperimento viene eseguito con intervalli di integrazione, tic, della durata di un secondo ponendo Δt = 1.

Con questo esperimento si possono attivare oscillazioni con deviazione angolare massima prefissata usando **[tasto A]**, oppure con velocità massima prefissata usando **[tasto V]**.

Per eseguire una misura accurata si deve essere precisi nel rilevare la durata del periodo. Questa precisione viene realizzata inserendo una procedura software apposita denominata "trigger" che individua e registra il momento del passaggio per lo zero dell'angolo del pendolo.

Prove di misura

Si avvia l'oscillazione in uno dei modi sopra spiegati, con il **[tasto T]** si attiva la procedura che provvede alla misura della durata del periodo fino a quando non si preme di nuovo **[tasto T]** che conclude la procedura.

Per primo si assegna una oscillazione con deviazione massima di tre gradi.

Questo angolo potrebbe corrispondere alla definizione di "piccolo angolo".

In effetti la sua ampiezza corrisponde a 0,0523598 rad e il seno di tale angolo vale: 0,0523359 con un errore percentuale:

$$err\ \% = \frac{ang - sen}{ang} * 100 =$$

$$= \frac{0{,}0523598 - 0{,}0523359}{0{,}0523598} * 100 = 0{,}046\,\%$$

L'errore che si commette nell'approssimare un angolo di 0,0523598 rad (3°) con il suo seno è effettivamente molto piccolo.

Con i parametri definiti nel progetto, la **teoria** prevede una durata del periodo pari a:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2{,}006067\ s$$

il cui valore viene riportato sulla stage.

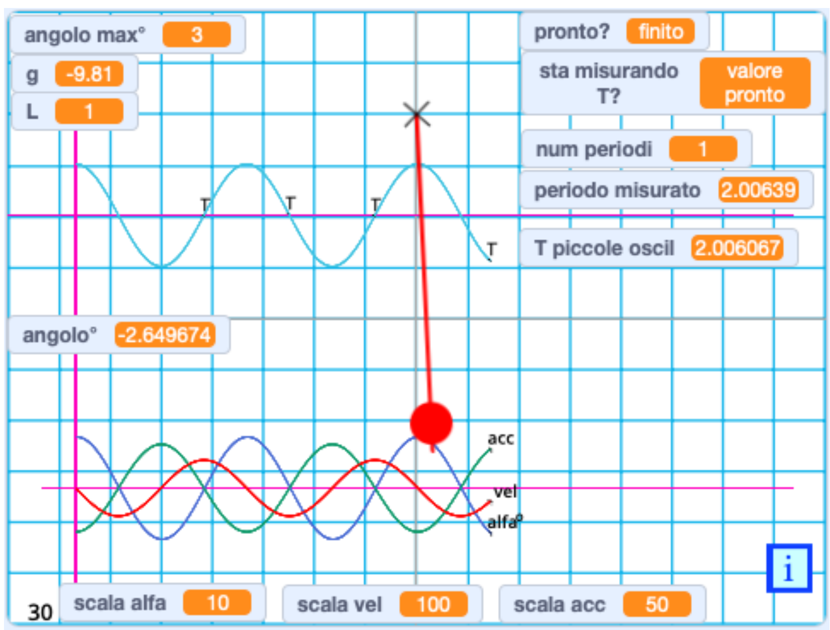
La misurazione del periodo si sviluppa in questo modo:

- si avvia l'oscillazione scegliendo la massima elongazione con **[tasto A]**;
- si preme **[tasto T]** per attivare il trigger;

- il trigger attiva il cronometro appena il valore dell'angolo attraversa lo zero (zero crossing);
- si attende il completamento di almeno mezza oscillazione;
- dopo un qualunque numero di mezze oscillazioni si preme di nuovo **[tasto T]** per terminare la misura del tempo al successivo attraversamento dello zero;
- si può arrestare il moto con **[spazio]**;
- lo script calcola la durata del periodo misurato tenendo conto del numero di mezzi periodi interessati alla prova.

Lo script con il trigger misura la durata del periodo sulla base del tempo trascorso fra due attraversamenti per lo zero ed il numero di mezze oscillazioni conteggiate.

Il risultato viene illustrato come nel disegno:



In questo caso il cronometro ha conteggiato il tempo per un periodo ed il risultato è T = 2,00639 tic.

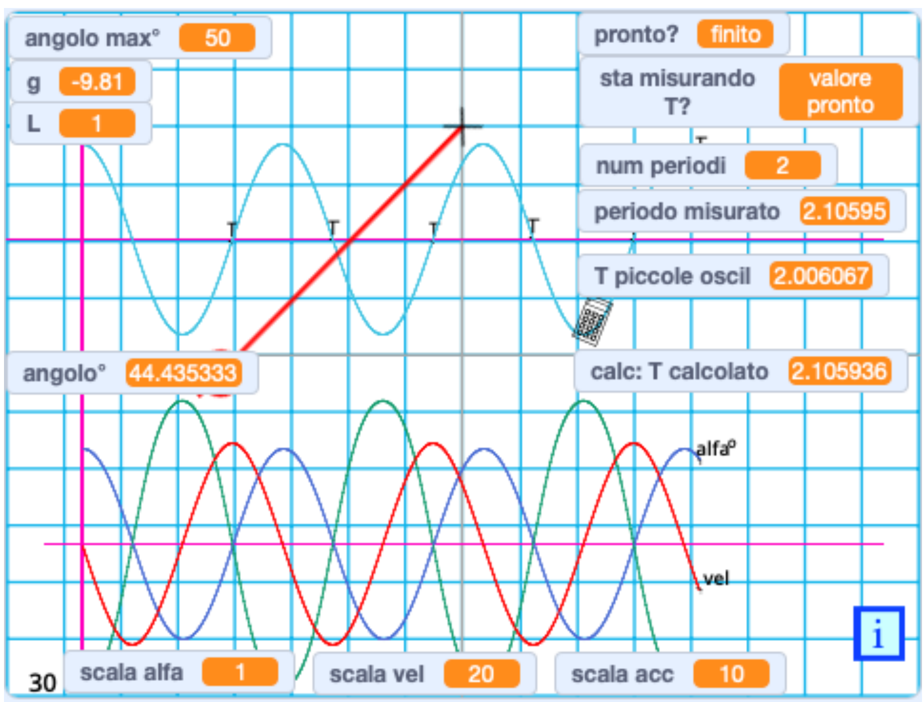
Per essere una simulazione, questo risultato non è niente male! L'errore commesso dalla simulazione, se confrontato con il valore teorico, è:

$$err\,\% = \frac{T_{3°} - T_0}{T_0} * 100 = \frac{2{,}00639 - 2{,}00607}{2{,}00607} * 100 = 0{,}016\,\%$$

Si può effettuare la misurazione sulla base di quanti semiperiodi si voglia.

Nota. La precisione usata nel trascrivere anche i centomillesimi di secondo (o di tic) è eccessiva per le approssimazioni inerenti l'assunto del "piccolo angolo" da un lato o il metodo di simulazione numerica dall'altro, ma ha un significato nel tentativo di verificare l'isocronismo delle oscillazioni.

Con una ampiezza maggiore (50°) si rileva questo risultato:



Il periodo misurato è molto più grande del periodo calcolato per le piccole oscillazioni.

Con **[tasto C]** si fa calcolare a Scratch il periodo con l'espressione corretta e si vede che la misurazione approssima molto bene questo valore.

Verifica dell'isocronismo

Sono state eseguite misurazioni con diversi valori di elongazione massima i cui risultati vengono riassunti nella seguente tabella:

N	max elongazione	periodo misurato [tic]
1	1° = 0,01745r	2,00609
2	3° = 0,05236r	2,00639
3	5° = 0,2618r	2,007
4	10° = 0,17453r	2,00987
5	20° = 0,3491r	2,02143
6	45° = 0,7854r	2,08625
7	60° = 1,0472r	2,15288
8	75° = 1,31r	2,24473
9	90° = 1,5708r	2,3679

La tabella mostra risultati contrari alla tesi dell'isocronismo: la durata del periodo cresce con l'angolo.

Per un angolo di oscillazione di 1°, il valore rilevato con l'esperimento è vicinissimo al valore teorico atteso.

Per angoli fino a 5°, la percezione sensoriale è a favore dell'isocronismo non potendo cogliere differenze intorno ai millesimi di secondo.

Considerazioni

A livello strumentale le differenze ci sono e non possono essere ammissibili per orologi di precisione che si troverebbero ad accumulare tale differenza per misurazioni della durata di migliaia di secondi.

La precisione di un orologio a pendolo è accettabile solo se viene mantenuta costante l'elongazione massima dell'oscillazione; se quest'ultima non è mantenuta costante, il periodo di oscillazione non può essere ritenuto valido per la misurazione del tempo.

A questo risultato era già arrivato Christiaan Huygens nel 1659 quando aveva trovato nel **pendolo cicloidale** il vero isocronismo.

L'isocronismo del pendolo fu una intuizione geniale di **Galileo Galilei** (1592) ma lui non aveva strumenti per effettuare verifiche molto accurate per angoli di oscillazione di diversa ampiezza.

Va anche notato che il periodo di oscillazione dipende dall'accelerazione di gravità "***g***".

Per tale motivo un orologio a pendolo risente della collocazione sulla Terra (quota e latitudine) ed esso non assicura misure del tempo precise da un luogo ad un altro, anche in presenza di ampiezze costanti, a meno che non siano possibili delle piccole regolazioni ad hoc agendo su piccole masse da spostare lungo l'asta.

Conclusione

Il periodo T dipende dall'ampiezza dell'oscillazione!

Sull'argomento i libri di fisica non sono molto chiari.

Nei testi si legge che le oscillazioni del pendolo sono isocrone se sono "piccole".

Quanto debbano essere piccole non è dato saperlo.

Con oscillazioni piccole si ha il vantaggio di semplificare un'equazione differenziale altrimenti difficile da integrare.

Accettare l'approssimazione sen$\theta = \theta$ per piccoli angoli significa dedurre una soluzione non esatta, quindi le conclusioni sono approssimate e da esse non si può generalizzare affermando che "le oscillazioni del pendolo sono isocrone".

Al più si può dire che con piccole oscillazioni l'errore è impercettibile, ma non si può parlare di isocronismo[6].

La semplificazione fatta per poter integrare facilmente l'equazione differenziale non autorizza a generalizzarne il risultato, affermando che la durata delle piccole oscillazioni di un pendolo è indipendente dall'ampiezza.

Documentazione

Alla pagina 5 dell'articolo edito da **Università di Verona** si afferma che:

---

[6] *Nelle misure di tempo anche il termine "impercettibile" è privo di senso, giacché si possono misurare tempi con una precisione grandissima se confrontata con quella del pendolo.*

"In realtà, la soluzione esatta dell'equazione 8 mostra che il periodo τ dipende non solo dalla lunghezza L e dall'accelerazione di gravità g, ma anche dall'ampiezza d'oscillazione θ_0 secondo uno sviluppo in serie i cui primi termini sono:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) + \frac{4}{96}\sin^4\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) + ...\right].$$

…"

e in **docentiunimc** a pagina 2 si legge che la soluzione è rappresentata dalla serie:

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 - \frac{119}{92160}\theta_0^6 + ...\right)$$

Un'altra soluzione si trova a "**unicatania**" grazie alla tesi di laurea di Enrica Trovato (2003).

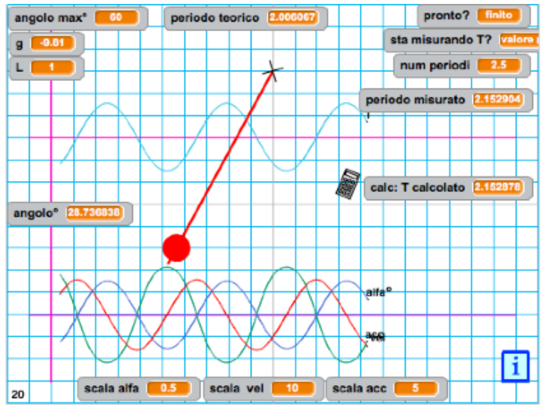
Un'espressione ancora più completa è reperibile a questa pagina di **wikipedia** (in inglese) dove sono illustrate le diverse soluzioni dell'integrale ellittico.

La soluzione sotto riportata è quella che viene utilizzata dalla calcolatrice dell'applicazione inserita nel progetto "**il periodo del pendolo**", con la quale si effettua il calcolo del periodo utilizzando la serie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3\,072}\theta_0^4 + \frac{173}{737\,280}\theta_0^6 + \frac{22\,931}{1\,321\,205\,760}\theta_0^8 + \frac{1\,319\,183}{951\,268\,147\,200}\theta_0^{10} + \frac{233\,526\,463}{2\,009\,078\,326\,886\,400}\theta_0^{12} + \cdots\right),$$

Si preme **[tasto C]** e si legge il valore calcolato per l'ampiezza massima che si sta osservando nell'esperimento.

Inserendo un'ampiezza massima di 60° si ottiene questo insieme di risultati:



da cui si ricava che, con g = 9,81 m/s² e L = 1 m, il periodo ***T0*** per oscillazioni di piccolissima ampiezza è:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2{,}006067\ s$$

Ovviamente il valore di T_0 che appare sullo stage è esatto, perché il calcolo è stato impostato proprio con la suddetta espressione.

Con l'esperimento in atto, la misurazione effettuata da Scratch sul periodo di un'oscillazione di ampiezza 60° fornisce il risultato:

$$T_m = 2{,}152904\ s$$

Il periodo calcolato con l'uso della calcolatrice che utilizza lo sviluppo in serie della soluzione dell'integrale ellittico offre il risultato:

$$T_c = 2{,}152878\ s$$

che differisce dal valore misurato di

$$\frac{T_c - T_m}{T_m} * 100 = \frac{2{,}152878 - 2{,}152904}{2{,}152904} * 100 = 0{,}003\ \%$$

Questo risultato illustra bene la precisione che si ottiene con la simulazione del pendolo realizzata con Scratch.

Viene anche messa a disposizione una tabella elaborata con un foglio di calcolo che mette a confronto le varie soluzioni proposte:

correzioni del periodo del pendolo in base all'ampiezza massima										
T0=	2006,067	ms								
			Università di Verona		docentiunimc		Liceo Volterra		wikipedia	
alfa deg	**alfa rad**	**Tm**	**k1= 1+1/4*S**	**T0*k1**	**k2=1+δ**	**T0*k2**	**K3=1+1/4*SEN(δ/2)^**		**K4=1+1/16 δ^2+11/3**	
1	0,0175	2.006,09	1,00	2.006,11	1,00	2.006,11	1,00	2.006,11	1,00	2.006,11
3	0,0524	2.006,39	1,00	2.006,41	1,00	2.006,41	1,00	2.006,41	1,00	2.006,41
5	0,0873	2.007,00	1,00	2.007,02	1,00	2.007,02	1,00	2.007,02	1,00	2.007,02
10	0,1745	2.009,87	1,00	2.009,88	1,00	2.009,89	1,00	2.009,89	1,00	2.009,89
20	0,3491	2.021,43	1,01	2.021,27	1,01	2.021,45	1,01	2.021,45	1,01	2.021,45
45	0,7854	2.086,25	1,04	2.081,31	1,04	2.086,14	1,04	2.086,18	1,04	2.086,26
60	1,0472	2.152,88	1,07	2.136,67	1,07	2.152,20	1,07	2.152,14	1,07	2.152,87
75	1,3090	2.244,73	1,10	2.203,40	1,12	2.241,99	1,12	2.240,64	1,12	2.244,71
90	1,5708	2.367,90	1,14	2.277,72	1,18	2.359,16	1,17	2.351,84	1,18	2.367,83

La soluzione che meglio concorda con l'esperimento eseguito con Scratch è quella proposta da **wikipedia** (sfondo verde).

Il risultato conferma la tesi che le oscillazioni del pendolo non sono indipendenti dall'ampiezza, ed il periodo si può dedurre sia dalla simulazione sia dal calcolo con la soluzione dell'integrale ellittico.

Una bella simulazione di laboratorio si trova a **PhET** sviluppato anche con **geogebra**, dove si possono fare esperimenti con calcolo del periodo effettivo.